Γραμμικός Προγραμματισμός 6/3

Ασκήσεις Φυλλαδίου

8) Ορίζω x_{ij} : ο αριθμός ερωτηθέντων της περιοχής i που ανήκουν στην περιοχή j

$i = 1, 2$ (1 αστική, 2 αγροτική) j = 1, ≤ 30 ; 2, $31-50$; 3, ≥ 51

$$\min\{7{,}5\, x_{11} + 68\, x_{12} + \dots + 6.1\, x_{23}\}$$

Περιορισμοί : $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \geq 2.300$

$x_{11} + x_{21} \geq 1000$

$x_{12} + x_{22} \geq 600$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 0.15 \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_{ij}$

$x_{13} \leq 0.2\,(x_{13} + x_{23})$

$x_{ij} \geq 0$

9) Ορίζω x_1: αριθμός κλινών που διατίθενται σε παθολογικά περιστατικά

x_2: -//- σε χειρουργικά περιστατικά.

8-ήμερα στις 365 5-ήμερα στις 365

$$\max\{2280 \times 45625\, x_1 + 1515 \times 73\, x_2\}$$

Περιορισμοί : $x_1 + x_2 \leq 90$

$3{,}1 \times 45.625x_1 + 2.6 \times 73x_2 \le 1500$ (δυνατότητα εργαστηρίων)

$1 \times 45625\, x_1 + 2 \cdot 73x_2 \le 7.000$ (δυνατότητα ~~παθολογικών~~ ακτινολογικών)

$73x_2 \le 280$ (χειρουργία)

$x_1, x_2 \ge 0$

10) Ορίζω x_{ij}: τα στρέμματα που καλλιεργούνται με το είδος i στο κομμάτι j.

$i = \beta, \kappa, \varphi$ $\quad j = 1, 2, 3$

max $\{600(x_{\beta 1} + x_{\beta 2} + x_{\beta 3}) + 450(x_{\kappa 1} + x_{\kappa 2} + x_{\kappa 3}) + 300(x_{\varphi 1} + x_{\varphi 2} + x_{\varphi 3})\}$

Περιορισμοί:

$300 \le x_{\beta 1} + x_{\kappa 1} + x_{\varphi 1} \le 500$

$480 \le x_{\beta 2} + x_{\kappa 2} + x_{\varphi 2} \le 800$

$420 \le x_{\beta 3} + x_{\kappa 2} + x_{\varphi 3} \le 700$

Εσύ μου προσθέτει κάτι αν το χρειάζω

$(x_{\beta 1} + x_{\beta 2} + x_{\beta 3} + x_{\kappa 1} + x_{\kappa 2} + x_{\kappa 3} + x_{\varphi 1} + x_{\varphi 2} + x_{\varphi 3} \le 2.000)$

$x_{\beta 1} + x_{\beta 2} + x_{\beta 3} \le 900$

$x_{\kappa 1} + x_{\kappa 2} + x_{\kappa 3} \le 700$

$x_{\varphi 1} + x_{\varphi 2} + x_{\varphi 3} \le 1000$

$$\frac{x_{\beta 1} + x_{\kappa 1} + x_{\varphi 1}}{500} = \frac{x_{\beta 2} + x_{\kappa 2} + x_{\varphi 2}}{800} = \frac{x_{\beta 3} + x_{\kappa 3} + x_{\varphi 3}}{700}$$

11) Ορίζω x: αριθμός μόνιμων υπαλλήλων

y: αριθμός των υπαλλήλων που προσέρχονται για εργασία των 9, 10, 11, 12, 13

min $\{x \cdot 50 + 16(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)\}$

Περιορισμοί: $x \le 12$

$x+y_1 \ge 10$

$x+y_1+y_2 \ge 12$

οι μισοί από τους μόνιμους κάνουν διάλειμμα

$\frac{x}{2}+y_1+y_2+y_3 \ge 14$

$\frac{x}{2}+y_1+y_2+y_3+y_4 \ge 16$

$x+y_2+y_3+y_4+y_5 \ge 18$

$x+y_2+y_4+y_5 \ge 17$

$x+y_4+y_5 \ge 15$

$x+y_5 \ge 10$

$4(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5) \le 0.5(10+12+14+\dots+10)$

$x \ge 0$

$y_i \ge 0$

12) Ορίζω: A_i .. οι ώρες για την εκτέλεση της εργασίας A που γίνεται στο εργαστήριο i

B_i -//- B

Γ_i -//- Γ

Δ_i -//- Δ

min. $(A_1+B_1+\Gamma_1+\Delta_1)89+(A_2+B_2+\Gamma_2+\Delta_2)81+(A_3+B_3+\Gamma_3+\Delta_3)84$

Περιορισμοί: $A_1+B_1+\Gamma_1+\Delta_1 \le 160$

$A_2+B_2+\Gamma_2+\Delta_2 \le 160$

$A_3+B_3+\Gamma_3+\Delta_3 \le 160$

$$\frac{A_1}{32} + \frac{A_2}{39} + \frac{A_3}{46} = 1$$

$$\frac{B_1}{151} + \frac{B_2}{147} + \frac{B_3}{155} = 1$$

$$\frac{\Gamma_1}{72} + \frac{\Gamma_2}{61} + \frac{\Gamma_3}{57} = 1$$

$$\frac{\Delta_1}{118} + \frac{\Delta_2}{126} + \frac{\Delta_3}{121} = 1$$

$$A_i, B_i, \Gamma_i, \Delta_i \geq 1$$

13) Ορίζω x_{ij}: αριθμός μαθητών που θα μεταφερθούν από τον i-τομέα στον j-σχολείο

$i = 1, 2, 3, 4, 5$

$j = 1, 2, 3, \cancel{4}$

$\min \; 8x_{11} + 11x_{12} + \dots + 12x_{53}$

Περιορισμοί:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 700$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 900$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 600$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} = 500$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} \leq 1200$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} \leq 1200$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} \leq 1200$$

$x_{ij} \geq 0 \qquad x_{23} = x_{42} = x_{51} = 0$

14) Ορίζω x_A : κομμάτια τύπου A

x_B : B

x_C : C

y : τεμάχια τελικού προϊόντος

max y

$y = x_A$
$y = x_B$
$y = x_C$

Περιορισμοί: $10x_A + 8x_B + 6x_C \le 2 \cdot 8 \cdot 60$

$9x_A + 21x_B + 15x_C \le 3 \cdot 8 \cdot 60$

$$\left| \frac{10x_A + 8x_B + 6x_C}{2} - \frac{9x_A + 21x_B + 15x_C}{3} \right| \le 60$$

$y, x_A, x_B, x_C \ge 0$

15) Ορίζω x_i: ο αριθμός των σερβιτόρων που ξεκινούν την πενθήμερη εργασία τους την i-μέρα

min $x_1 + x_2 + \dots + x_7$

Περιορισμοί: $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 17$ (Δευτέρα)

$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 13$ (Τρίτη)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + \cancel{x_7} \ge 15$ (Τετάρτη)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \ge 19$ (Πέμπτη)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 14$ (Παρασκευή)

$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \ge 16$ (Σάββατο)

$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 11$ (Κυριακή)

$x_i \ge 0$

Γραφική επίλυση

Παράδειγμα

1)

Προϊόν Α	Προϊόν Β	Διαθεσιμότητα
1	1	550
1	3	100
2	5	2.000
400	Απερ	
150χμ	200	

Λύση

έστω 2

$$\max \; 150x_1 + 200x_2$$

Περιορισμοί

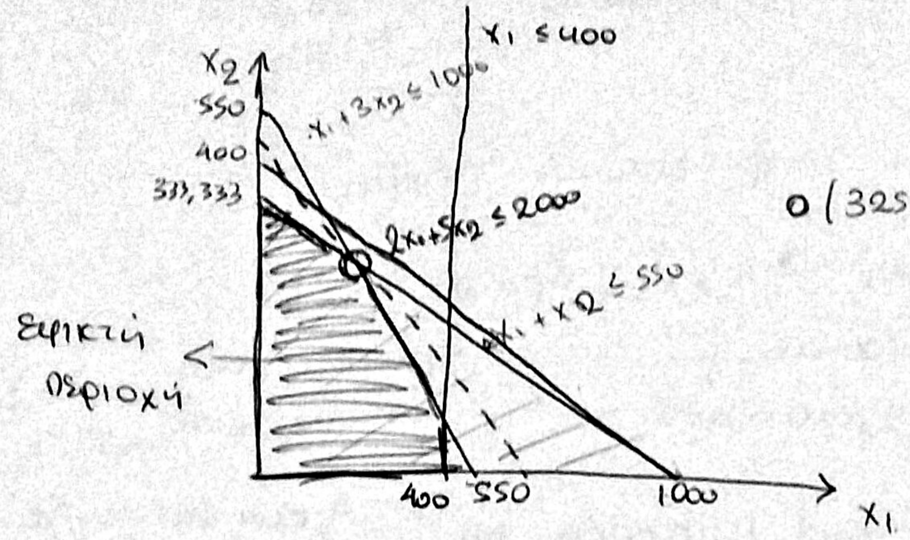
$$x_1 + x_2 \le 550$$

$$x_1 + 3x_2 \le 1000$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 2000$$

$$x_1 \le 400$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



$\Delta(325, 225)$

Δίνω αυθαίρετη τιμή στο $150x_1+200x_2 = 600$

Άρα για $x_1=325$ και $x_2=225$ έχω άριστη λύση την $z=93750$

Κορυφή	(x_1,x_2)	z	
A	$(0,0)$	0	
B	$(400,0)$	60000	
Γ	$(400,150)$	90000	
Δ	$(325,225)$	93750	Άριστη
Ε	$(0,100/3)$	200000/3	

Την μέθοδο αυτήν την χρησιμοποιώ μόνο για φραγμένες περιοχές

2) Μια διαφημιστική εταιρία προγραμματίζει διαφημιστική εκστρατεία. Το κόστος προβολής το πρωί είναι 1,5 χ.Μ. ενώ το βράδυ 2,5 χ.Μ. και παρακολουθούν περίπου το πρωί 200.000 γυναίκες και 25.000 άντρες ενώ το βράδυ 300.000 γυναίκες και 50.000 άντρες. Η εταιρία προσδωκά να παρακολουθήσουν την διαφήμιση τουλάχιστον 15.000.000 γυναίκες και 9.000.000 άντρες. Επίσης θέλει να γίνονται τουλάχιστον 20 προβολές στην βραδινή ζώνη. Πόσα μηνύματα διαφημιστικά πρέπει να μπουν σε κάθε ζώνη ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος?

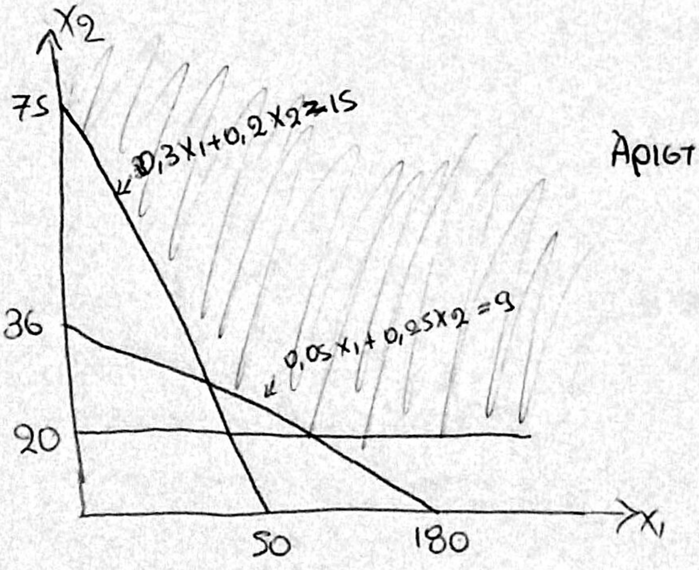
Λύση

Ορίζω x_1: τα μηνύματα στην πρωινή ζώνη

x_2: -//- βραδινή

$\min z = 1,5x_1 + 2,5x_2$

Περιορισμοί
$$0,3x_1 + 0,2x_2 \geq 15$$
$$0,05x_1 + 0,25x_2 \geq 9$$
$$x_2 \geq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



	Κορυφή	(x_1, x_2)	z
Άριστη	Α	(30,30)	120
	Β	(180,20)	170
	Γ	(0,75)	187,5

3) Η επιχείρηση λειτουργεί 960 ώρες/μήνα. Χρησιμοποιεί 2 τύπους -s- υλικών: κατεργασμένα δέρματα, φόδρες. Διαθέτει 297μ φόδρα, 600μ. δέρμα. Ένα γυναικείο παλτό χρειάζεται 5μ δέρμα, 3μ φόδρα και 6 ώρες ενώ ένα αντρικό 4μ δέρμα, 1μ. φόδρα και 8 ώρες. Από κάθε ~~παλτό~~ παλτό έχει κέρδος 25 χ.μ ενώ από κάθε σακάκι 20 χ.μ.. Θέλει να μεγιστοποιεί το κέρδος της.

Λύση

Ορίζω x_1: αριθμό παλτών

x_2: αριθμό σακακίων

$$\max z = 25x_1 + 20x_2$$

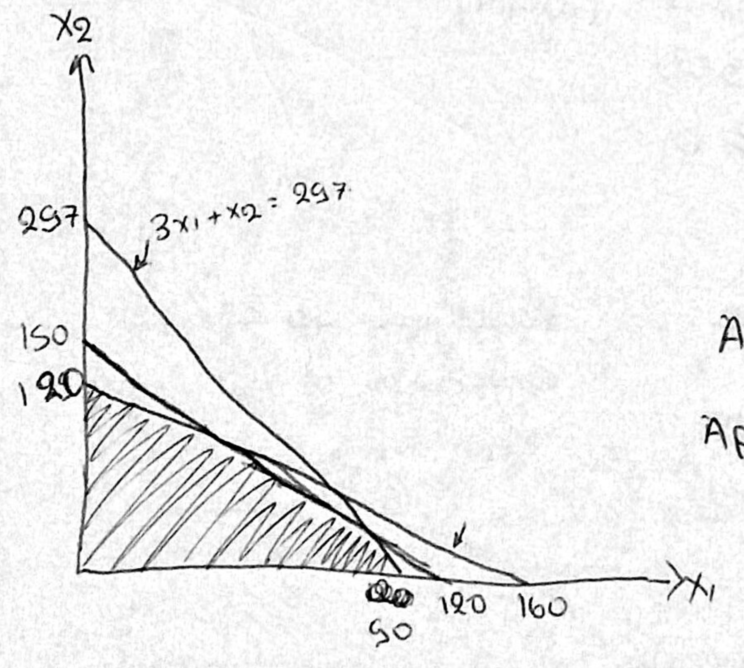
Περιορισμοί:

$3x_1 + x_2 \leq 297$ (φόδρες)

$5x_1 + 4x_2 \leq 600$ (δέρμα)

$6x_1 + 8x_2 \leq 960$ (εργοστ.)

$x_1, x_2 \geq 0$



	Κορυφή	(x_1,x_2)	z
	A	(0,0)	0
	B	(99,0)	2475
Άριστη	Γ	(84,45)	3000
Άριστη	Δ	(60,75)	3000
	Ε	(0,120)	2400

4) Εταιρία παρασκευάζει διαλύματα $ΔΛ_1$, $ΔΛ_2$. Για την παραγωγή 1000lt από $ΔΛ_1$ απαιτούνται 2 ώρες μίξη και 1 καθαρισμού ενώ για την παραγωγή 1000lt από $ΔΛ_2$ απαιτούνται 1 ώρα μίξης και 2 καθαρισμού. Οι εργάτες επαρκούν για 230 ώρες μίξης και 250 ώρες καθαρισμού. Υπολογίζει ότι το κέρδος της είναι 300 χ.μ./lt για το $ΔΛ_1$ και 500 χ.μ./lt για το $ΔΛ_2$. Η αγορά απορροφά άπειρες ποσότητες από lt $ΔΛ_1$ και το πολύ 120.000 lt $ΔΛ_2$. Θέλουμε μεγιστοποίηση κέρδους. Τι αλλάζει αν οι διαθέσιμες ώρες εργασίας επιτρέπουν το πολύ 300.000 lt?

Λύση

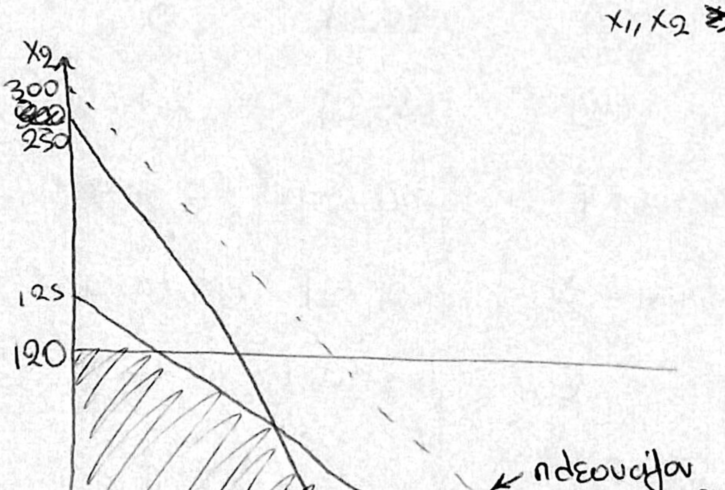
Ορίζω x_1: τα lt σε χιλιάδες από $ΔΛ_1$

x_2: -//- $ΔΛ_2$

$\max\ 3x_1 + 5x_2$

Περιορισμοί

$$2x_1 + x_2 \le 230 \quad \text{(μίξη)}$$
$$x_1 + 2x_2 \le 250 \quad \text{(καθαρισμός)}$$
$$x_2 \le 120 \quad \text{(αγορά)}$$
$$x_1 + x_2 \le 300$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



Παρατηρώ ότι δεν με επηρεάζει ο πλεονάζων περιορισμός

5) Αν κατασκευαστούν αποκλειστικά φορτηγά τότε θα είχαμε παραγωγή 50 αυτοκίνητα/ημέρα ενώ αν αποκλειστικά βαφούν τότε θα είχαμε 40 αυτοκίνητα/ημέρα. Αντίστοιχα για κατασκευή επιβατηγών έχουμε 50 αυτοκίνητα/ημέρα ενώ για την βαφή της 60 αυτοκίνητα/ημέρα. Το κέρδος είναι 3 χ.μ/φορτηγό και 2 χ.μ/ επιβατηγό. Η ημερήσια παράδοση είναι τουλάχιστον 30 φορτηγά και 20 επιβατηγά. Θέλω μεγιστοποίηση κέρδους.

Λύση

Ορίζω x_1: αριθμό φορτηγών

x_2: αριθμό επιβατηγών

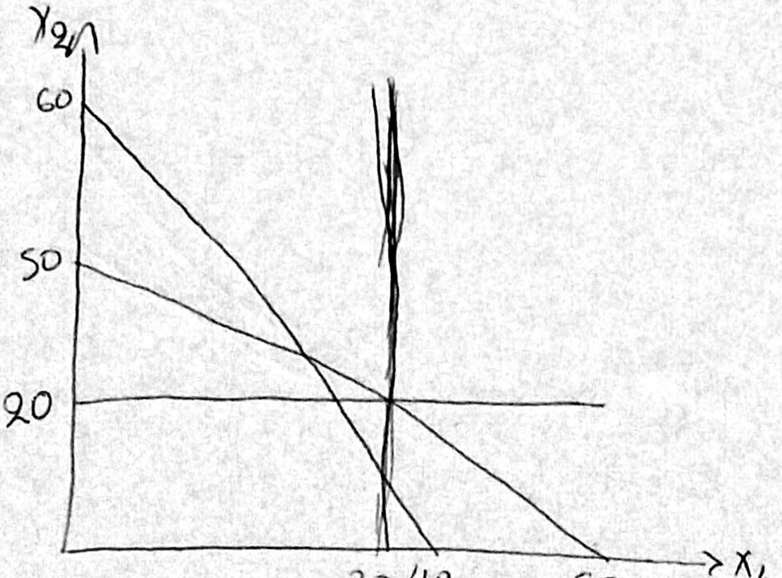
$\max\ 3x_1 + 2x_2$

Περιορισμοί: $\dfrac{x_1}{50} + \dfrac{x_2}{50} \le 1$

$\dfrac{x_1}{40} + \dfrac{x_2}{60} \le 1$

$x_1 \ge 30$

$x_2 \ge 20$



δεν υπάρχει εφικτή περιοχή